10-11-14.

Παράδειγμα Gauss-Seidel.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{GS}=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 2 & & \\ -1 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{*}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- Για να βρω τον αντίστροφο του τριγωνικού θέλω 3 συστήματα.

Ο πίνακας G_{GS} για να συγκλίνει πρέπει να έχει φασματική ακτίνα <1 ή

η νόρμα άπειρο <1

$\|$ μέγιστο ~~...~~ αθροισμ. των γραμμών.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & & & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left[(D-L)^{-1}\right]^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\|G_{GS}\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$

$P(G_J) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\det(G_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left[\left(1/4-\lambda\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$P(G_{GS}) = \frac{1}{2}$, $P(G_{GS}) = P(G_J)^2$.

$\varepsilon^{(m)} = G^m \varepsilon^{(0)}$. Ταχύτητα σύγκλισης της Gauss-Seidel είναι διπλάσια της Jacobi.

Παρεμβολή

Παρεμβολή είναι ειδική κατηγορία της θεωρίας προσέγγισης.

Θ.Π: Δοθέντων $n+1$ σημείων $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,2,\dots n$ να βρεθεί "απλή" συνάρτηση φ που θα προσεγγίζει την f στα σημεία αυτά. Απλή σημαίνει με καλές ιδιότητες που μπορεί να μελετηθεί εύκολα.

Παράδειγμα: πολυωνυμικές, κατά τμήματα πολυωνύμων, τριγωνομετρικές, εκθετικές, πηλίκα πολυων.

Στην Παρεμβολή, η συνάρτηση φ περνάει από τα σημεία, δηλαδή $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,\dots n$.

Γνωρίζουμε τη φ στο διάστημα $[a,b]$ που περιέχει τα x_i.

Θεώρημα Weistrass: Δοθέντων $f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο π, τέτοιο ώστε $\max_{a\le x\le b} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

Πολυωνυμική παρεμβολή τύπου Lagrange

Δοθέντων $n+1$ σημείων $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,\dots n$ διαφορετικά μεταξύ των. Να βρεθεί πολυώνυμο P τέτοιο ώστε $P(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,2,\dots n$.

Θεώρημα (Ύπαρξη - Μοναδικότητα): Δοθέντων σημείων $x_0, x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$ (διαφορετικά μεταξύ των) και των τιμών $y_0, y_1, \dots y_n \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο p το πολύ n βαθμού ($p \in \mathbb{P}_n$) τέτοιο ώστε: $P(x_i)=y_i$
$i=0,1,2..n$

Απόδειξη.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p\in \mathbb{P}_n$: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ με προσδιοριστέα τα a_i, $i=0,1,\dots n$. Η συνθήκη $P(x_i)=y_i$ δίνει το γραμμ. σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} a_0+x_0a_1+x_0^2a_2+\dots+x_0^na_n=y_0 \\ a_0+x_1a_1+x_1^2a_2+\dots+x_1^na_n=y_1 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_0+x_na_1+x_n^2a_2+\dots+x_n^na_n=y_n \end{array}\right\} n+1 \text{ εξισώσεις με } n+1 \text{ αγνώστους}$$

Το γραμμικό σύστημα είναι τύπου Vandermonde με διαφορετικά σημεία, επομένως η αντιστ. ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός ⇒ υπάρχει μοναδική λύση.

Ένας τρόπος εύρεσης του πολυων. παρεμβολής, θα μπορούσε να είναι η λύση του συστήματος. Όμως αποδεικνύεται ότι γρ. συστήματα τύπου Vandermonde, έχουν κακή κατάσταση που σημαίνει ότι μικρά σφάλματα στους υπολογισμούς επιφέρουν μεγάλα σφάλματα στο αποτέλεσμα.

Θεώρημα: Έστω $x_0, x_1, \dots x_n$, $n+1$ σημεία διαφ. μεταξύ των, στο διάστημα $[a,b]$ και $f\in C^{n+1}[a,b]$. Έστω $P\in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία αυτά. Τότε ισχύουν $(\forall x\in[a,b])(\exists \xi\in(a,b))$: $f(x)-P(x) =$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\text{γνώμενο}}$$

$$\|f-P\|_\infty \le \frac{1}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\cdot\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

όπου αν η g ορίζεται στο $[a,b]$, $\|g\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|g(x)|$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι ισχύει για $x\in\{x_0,x_1,\dots x_n\}$. Έστω $x\notin\{x_0,\dots x_n\}$. Ορίζω την $\Phi(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$. Ορίζω τη συνάρτηση φ ως:

$$\varphi(t)=f(t)-P(t)-\frac{f(x)-P(x)}{\Phi(x)}\Phi(t)$$

παρατηρώ ότι $\varphi(x_i)=f(x_i)-P(x_i)-\dfrac{f(x)-P(x)}{\Phi(x)}\Phi(x_i)=0$,

$\varphi(x)=f(x)-P(x)-\dfrac{f(x)-P(x)}{\Phi(x)}\Phi(x)=0$

Η φ έχει τουλ. $\underline{n+2}$ ρίζες τις x_i, $i=0,1,\dots n$ και x στο $[a,b]$.
Η $\varphi\in C^{n+1}[a,b]$ από το θεώρημα Rolle, η φ' έχει τουλ. $\underline{n+1}$ ρίζες στο (a,b), η φ'' τουλ. n κ.ο.κ η $\varphi^{(n+1)}$ έχει τουλ. μια ρίζα $\xi\in(a,b)$.

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-P^{(n+1)}(t)-\frac{f(x)-P(x)}{\Phi(x)}\cdot\Phi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-\frac{f(x)-P(x)}{\Phi(x)}\cdot\underbrace{}_{(n+1)!}$$

Στο σημείο ξ: $0=\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\dfrac{f(x)-P(x)}{\Phi(x)}(n+1)!\iff$

$$f(x)-P(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\Phi(x)$$

Παρατήρηση. Αν f είναι πολυώνυμο το πολύ $\underline{n}$ βαθμού τότε αυτή είναι και το πολ. παρεμβολής της. Αν η f είναι πολ. $\underline{n+1}$ βαθμού και γνωρίζουμε τον συντελεστή του μεγ. όρου, τότε βρίσκουμε την f. Στο πολυώνυμο παρεμβολής p προσθέτουμε τη συνάρτηση $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=$
$\dfrac{c\cdot\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}}\cdot\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το μεγ. σφάλμα της γραμ. παρεμβολής της f στο $[a,b]$, στα $(a,f(a))$, $(b,f(b))$. Το $P_1(x)$ θα είναι:

$$P_1(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_1(x)|\le\max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|\cdot\max_{a\le x\le b}\frac{|f''(x)|}{2!}$$

$$|(x-a)(x-b)| = (x-a)(b-x) = -x^2+(a+b)x - ab = g(x)$$

$g'(x) = -2x+(a+b) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$, $g''(x) = -2 < 0$ το σημείο $\frac{a+b}{2}$ δίνει μέγιστο $\max\limits_{a \le x \le b} g(x) = \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$